Fondations axiomatiques d'une classe d'utilité espérée généralisée : l'utilité espérée algébrique

Paul Weng
LIP6
8 rue du Capitaine Scott
75015 Paris

28 avril 2006

Résumé

Dans ce papier, nous proposons deux axiomatisations de l'utilité espérée algébrique, qui est une utilité espérée généralisée, dans un cadre à la von Neumann-Morgenstern, *i.e.*la représentation de l'incertain est supposée connue et est ici décrite par une mesure de plausibilité valuée sur un semi-anneau (éventuellement partiellement) ordonné. Nous montrons que des axiomes identiques à ceux utilisés pour l'utilité espérée classique implique que les préférences sont représentées par une utilité espérée algébrique. Cette approche algébrique permet d'unifier de nombreux modèles déjà proposés (utilité espérée, utilité binaire possibiliste...) dans un même formalisme général et montre que l'utilité obtenue jouit des mêmes propriétés que l'utilité espérée classique : linéarité, cohérence dynamique, autodualité de la représentation sous-jacente de l'incertain, autodualité du critère de décision et possibilité de modéliser l'attitude du décideur face à l'incertain.

1 INTRODUCTION

Le modèle de l'utilité espérée (EU) est le modèle de décision dans l'incertain le plus répandu. En effet, outre le fait qu'il est un des premiers modèles à avoir été proposés, il vérifie de nombreuses propriétés le rendant facile à appliquer dans la pratique. Ainsi, les critères utilisés dans le modèle des processus de décision markoviens sont des instances de EU. Grâce aux travaux précurseurs de [vNM44], EU est le premier modèle décisionnel à avoir été axiomatisé. Cette axiomatisation fut ensuite reformulée et simplifiée ([Fis70, Mac88]). La justification axiomatique d'un modèle décisionnel est essentielle car elle fait ressortir les propriétés du modèle et révèle quels comportements décisionnels il peut décrire. De ce fait, celle-ci souligne les limites d'un modèle décisionnel et exhibe les situations où ce dernier ne peut être appliqué. En effet, les axiomes utilisés dans cette justification permettent de tester simplement si des préférences peuvent ou non être représentées par le critère étudié. Ainsi, l'axiomatisation de EU a permis de découvrir les situations où ce modèle ne convient pas ([All53, Ell61]). De plus, dans les axiomatisations à la von Neumann-Morgenstern (vNM), la représentation de l'incertain est supposée donnée et pour EU, l'incertain est supposé décrit par une distribution de probabilité. Cette hypothèse peut être discutable dans certaines situations, notamment celles pour lesquelles les données sont rares et/ou imprécises ([Ell61]). Enfin, même quand le problème de décision impose naturellement les probabilités comme représentation de l'incertain, elles peuvent être difficile à estimer. Par conséquent, il est intéressant de considérer d'autres types de représentations de l'incertain et d'étudier axiomatiquement d'autres modèles de décision.

Pour répondre aux limites des probabilités, d'autres représentations de l'incertain ont été proposées : les fonctions de croyance ([Sha76]), les kappa fonctions ([Spo88, GP92]), la théorie des possibilités ([DP90]), les probabilités symboliques ([DG92]), les probabilités qualitatives ([Leh96])... Ce sont toutes des instances de mesures de plausibilité (à ne pas confondre avec les fonctions de plausibilité) introduites par [FH95]. Cette notion est le modèle de représentation de l'incertain le plus général car elle inclut toutes les autres.

Pour toutes ces représentations de l'incertain, des modèles décisionnels ont été proposés ([JW93, GS00, DP95],...). Beaucoup de ces critères vérifient des propriétés similaires. Ce fait a été récemment souligné par [GS04] qui ont axiomatisé un modèle décisionnel exploitant les probabilités symboliques. Ils ont mené leur axiomatisation dans le cadre de [Sch89], ce qui est à notre avis critiquable. En effet, ce cadre est réellement justifié quand on veut dériver des probabilités subjectives (non nécessairement additives). Cependant, cela n'est pas exactement le cas dans [GS04]. Notre travail a en partie pour but de répondre à ce problème. Nous utilisons le modèle de l'utilité espérée généralisée fondée sur les mesures de plausibilité, qui a été proposée par [CH03], comme cadre de travail.

Plus précisément, nous fournissons deux axiomatisations dans un cadre vNM pour une classe particulière d'utilité espérée généralisée, que nous appelons utilité espérée algébrique (AEU). Dans ce cadre, la représentation de l'incertain est supposée donnée et modélisée par une mesure de plausibilité valuée dans un semi-anneau (éventuellement partiellement) ordonné. Les approches reposant sur les semi-anneaux ont montrés qu'elle pouvait offrir un traitement unifié à de nombreuses variations d'un même problème (voir [GMV84] pour les problèmes de graphe, [BMR+99] pour les problèmes de satisfaction de contraintes et [PSW05] pour les processus de décision markoviens). La première axiomatisation, similaire à celle de [LR57], est une reformulation dans le cadre vNM de celle proposée dans [GS04]. La seconde, inspirée de celle présentée dans [Mac88] utilise des axiomes plus naturels mais nécessite deux conditions de solvabilité. Cet approche algébrique permet de formuler la contrepartie de EU dans différentes représentations de l'incertain, factorisant ainsi EU et les nombreux modèles décisionnels fondés sur le concept d'utilité binaire (introduit par [GS01]) en un unique formalisme. De plus, notre travail souligne le fait que tous ces modèles partagent les mêmes propriétés formelles que EU : linéarité, cohérence dynamique, autodualité de la représentation sous-jacente de l'incertain, autodualité du critère de décision, possibilité de modéliser l'attitude du décideur face à l'incertain. Notons que la propriété de cohérence dynamique permet une intégration simple de AEU dans les problèmes de décision séquentiels, en particulier dans le cadre des MDP ([PSW05]).

Le reste du papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous introduisons les définitions requises : formalisation d'un problème de décision, mesure de plausibilité, semi-anneau, échelle binaire et utilité espérée généralisée. Dans la section 3, nous présentons les deux axiomatisations de l'utilité espérée algébrique. Ensuite, nous explicitons ses propriétés dans la section 4. Dans la section 5, nous comparons notre approche aux travaux précédents, notamment celui de [GS04]. Enfin, nous concluons avec la section 6.

2 Cadre de travail

Dans les problèmes de décision dans l'incertain, un agent doit faire un choix parmi un ensemble d'alternatives ou actes qui sont des fonctions d'un ensemble d'états de la nature dans un ensemble de conséquences. Un état de la nature peut être vu comme une description complète de l'environnement. L'incertain concernant la conséquence d'un acte provient du fait que le décideur ne sait pas dans quel état de la nature il se trouve. Cet incertain est ainsi modélisé comme un incertain sur l'état réel de la nature. A titre d'exemple, supposons qu'un agent doit se rendre en voiture de l'autre côté de Paris. Pour cela, il a le choix entre deux itinéraires : soit prendre par le centre ville, soit prendre par le périphérique. Les conséquences seraient, ici, la durée du trajet et les états de la nature seraient les états d'engorgement du centre ville et du périphérique. N'ayant qu'une connaissance incertaine et imprécise de l'état des routes, le décideur doit choisir un itinéraire. Formellement, un problème de décision peut être décrit par les éléments suivants :

- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini de conséquences avec une meilleure conséquence $\overline{x}$ et une pire conséquence $\underline{x}$.
- S un ensemble d'états de la nature.
- $\mathcal{A}$ un ensemble d'actes, défini comme X^S.

La relation de préférence du décideur (qui est simplement une relation binaire) sur l'ensemble des actes est notée par $\succsim$, qui signifie "au moins aussi bon que". Les actes sont notés $f, g, \ldots$ La relation $\succsim$ restreinte aux actes constants (conséquences) est notée $\succsim_X$. Les relations $\succ$ et $\sim$ notent respectivement la partie asymétrique et la partie symétrique de $\succsim$.

Les évènements dans ce contexte sont définis comme les éléments d'une σ-algèbre $\mathcal{F}$ de S, *i.e.*un ensemble de sous-ensembles fermé par union fini et par complémentation. Les évènements sont notés $A, B, \ldots$ Nous supposons que l'incertain sur l'état réel de la nature est représenté par une mesure de plausibilité ([FH95]). Une mesure de plausibilité Pl est une fonction de $\mathcal{F}$ dans une échelle (éventuellement partiellement) ordonnée P telle que $\mathrm{Pl}(\emptyset) = 0_P$, $\mathrm{Pl}(S) = 1_P$ et pour tout $A, B \in \mathcal{F}, B \subseteq A \subseteq S \Rightarrow \mathrm{Pl}(A) \geq \mathrm{Pl}(B)$. L'échelle P est supposée dotée de deux opérateurs internes $\oplus$ et $\otimes$ (les analogues de $+$ et $\times$ en théorie des probabilités), une relation (éventuellement partiellement) ordonnée $\geq$, et deux éléments spéciaux 0_P et 1_P. Les éléments de cette échelle sont notées $\lambda, \mu, \ldots$ Nous supposons ici que Pl est décomposable, *i.e.*$\mathrm{Pl}(A \cup B) = \mathrm{Pl}(A) \oplus \mathrm{Pl}(B)$ pour toute paire A, B d'évènements disjoints et $\mathrm{Pl}(A \cap B) = \mathrm{Pl}(A) \otimes \mathrm{Pl}(B)$ pour toute paire A, B d'évènements indépendants au sens des plausibilités ([Hal01]).

Dans ce papier, la structure $(P, \oplus, \otimes, 0_P, 1_P)$ est supposée être un semi-anneau ([GMV84]).

Definition 1 *Un semi-anneau* $(P, \oplus, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *est un ensemble* P *avec deux opérateurs binaires* $\oplus$ *et* $\otimes$*, tel que :*

A_1 $(P, \oplus, \mathbf{0})$ *est un semi-groupe commutatif avec* $\mathbf{0}$ *comme élément neutre (i.e.*$a \oplus b = b \oplus a, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c), a \oplus \mathbf{0} = a$*).*

A_2 $(P, \otimes, \mathbf{1})$ *est un semi-groupe avec* $\mathbf{1}$ *comme élément neutre, et pour lequel* $\mathbf{0}$ *est un élément absorbant (i.e.*$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c), a \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes a = a, a \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes a = \mathbf{0}$*).*

A_3 $\otimes$ *est distributif par rapport à* $\oplus$ *(i.e.*$(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c), a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$*).*

Par conséquent, l'ordre $\geq$ est lié à $\oplus$ et nous avons pour tout $\lambda, \mu \in P, \lambda \geq \mu \Rightarrow \exists \mu' \in P, \lambda = \mu \oplus \mu'$. Ces conditions ou des variantes de celles-ci ont été également imposées dans [DG92, FH95, Wey94]. Toutes ces conditions sont plutôt naturelles et sont vérifiées par de nombreuses mesures de plausibilité. Pour chacun des exemples, nous explicitons le semi-anneau associé. Les probabilités sont définies sur le semi-anneau $(\mathbb{R}^+, +, \times, 0, 1)$. Les possibilités qualitatives sont définies sur $(L, \max, \min, 0_L, 1_L)$ où L est une échelle qualitative finie dont le plus petit élement est noté 0_L et le grand 1_L. Les possibilités quantitatives sont définies sur $([0, 1], \max, \times, 0, 1)$. Les kappa fonctions sont définies sur $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$. Les probabilités symboliques sont définies sur $(\mathcal{S}, \boxplus, \boxtimes, \perp, \top)$ où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de support contenant deux éléments spéciaux $\perp$ et $\top$ et les opérateurs $\boxplus$ et $\boxtimes$ jouent des rôles similaires à $\oplus$ et $\otimes$.

Nous définissons maintenant les loteries qui sont associées aux actes. Une loterie simple π, qui est simplement une distribution de plausibilité, est définie comme une fonction de l'ensemble des conséquences X dans l'échelle qualitative P, telle que $\bigoplus_{x \in X} \pi(x) = 1_P$. Une loterie binaire est une loterie pour laquelle seules deux conséquences au maximum ont une plausibilité différente de 0_P. L'ensemble de toutes les loteries simples est noté $\Pi(X) = \{\pi \in P^X : \bigoplus_{x \in X} \pi(x) = 1_P\}$. Récursivement, nous définissons l'ensemble des loteries composées qui sont des loteries définies sur des loteries. $\Pi^1(X) = \Pi(X)$ et $\Pi^k(X) = \Pi^{k-1}(\Pi(X)), \forall k > 1$. L'ensemble de toutes les loteries (simples et composées) est noté par $\Pi^\infty(X) = \cup_{k=1}^{\infty} \Pi^k(X)$. Pour simplifier les notations, x note à la fois l'élément de X et la loterie dégénérée $\pi_x \in \Pi(X)$ telle que $\pi_x(x) = 1_P$ et $\pi_x(z) = 0_P, \forall z \neq x$. Comme l'ensemble des conséquences est finie, une loterie simple π peut être écrite : $[\lambda_1/x_1, \ldots, \lambda_n/x_n]$ où $\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i = 1_P$. Et plus généralement, une loterie composée avec k sous-loteries s'écrit : $[\lambda_1/\pi_1, \ldots, \lambda_k/\pi_k]$ où $\bigoplus_{i=1}^k \lambda_i = 1_P$ et $\forall i = 1 \ldots k, \pi_i \in \Pi^\infty(X)$. Chaque acte est associé à une unique loterie. Pour tout acte $f \in \mathcal{A}$, la loterie associée π^f est définie par : $\pi^f(x) = \mathrm{Pl}(\{s \in S : f(s) = x\}), \forall x \in X$. Dans ce contexte, comparer les actes revient à comparer leurs loteries associées. Par conséquent, nous travaillerons directement sur les loteries. Et la relation de préférence sur les loteries, induite par la relation de préférence sur les actes, est également notée $\succsim$.

De l'échelle P, une échelle binaire P_2 peut être construite.

$$P_2 = \{\langle \lambda, \mu \rangle \in P \times P : \lambda \oplus \mu = 1_P\}.$$

Les éléments de P_2 sont notés $\alpha, \beta, \ldots$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ dans P. Les couples de cet ensemble peuvent être interprétés comme des loteries binaires. Le premier (resp. le second) élément du couple serait la plausibilité d'obtenir la meilleure conséquence (resp. la pire). Par conséquent, un ordre naturel $\geq_2$ peut être défini sur P_2 grâce à $\geq$ de P, *i.e.*

$$\langle \lambda, \mu \rangle \geq_2 \langle \lambda', \mu' \rangle \Leftrightarrow (\lambda \geq \lambda' \text{ et } \mu' \geq \mu).$$

L'opérateur $\oplus$ est étendu comme un opérateur sur $P_2 \times P_2$ comme suit : $\langle \lambda, \mu \rangle \oplus \langle \lambda', \mu' \rangle = \langle \lambda \oplus \lambda', \mu \oplus \mu' \rangle$. Et l'opérateur $\otimes$ est étendu comme un opérateur sur $P \times P_2$ comme suit : $\lambda' \otimes \langle \lambda, \mu \rangle = \langle \lambda' \otimes \lambda, \lambda' \otimes \mu \rangle$. La surchage des notations ne devrait pas poser de problème car le contexte établira si les opérandes appartiennent à l'échelle P ou l'échelle P_2.

Exploitant les mesures de plausibilité, [CH03] ont proposé l'utilité espérée généralisée (GEU) comme critère de décision. Dans ce modèle, un ensemble U doté d'une relation de préférence $\succsim_U$ décrit les préférences du décideur sur les conséquences et un ensemble V doté de $\succsim_V$, qui est l'ensemble de valuation de GEU, décrit les préférences du décideur sur les actes. GEU est alors défini sur le domaine d'espérance $(U, P, V, \oplus^g, \otimes^g)$ où $\oplus^g : V \times V \to V$ et $\otimes^g : P \times U \to V$ sont les contreparties de $+$ et $\times$ dans le modèle de l'utilité espérée classique, et les quatres conditions suivantes sont requises :

B_1 $(x \oplus^g y) \oplus^g z = x \oplus^g (y \oplus^g z)$,

B_2 $x \oplus^g y = y \oplus^g x$,

B_3 $1_P \otimes^g x = x$,

B_4 $(U, \succsim_U)$ est une sous-structure de $(V, \succsim_V)$.

Pour tout acte, GEU s'écrit :

$$GEU(\pi) = \bigoplus_{x \in X}^{g} \pi(x) \otimes^g u(x)$$

où $u : X \to U$ est une fonction d'utilité qui représente les préférences du décideur sur les conséquences.

GEU est un modèle de décision très général et comme [CH03] l'ont démontré, toute relation de préférence peut être représentée par GEU. A titre d'exemple, l'utilité espérée classique (EU) est une instance de GEU et son domaine d'espérance peut s'écrire : $([0,1], [0,1], [0,1], +, \times)$. En utilisant ce cadre de travail, nous voulons construire la contrepartie de EU pour des mesures de plausibilité satisfaisant les conditions A_1-A_3.

3 EU algébrique

L'utilité espérée algébrique (AEU) est un GEU défini sur le domaine d'espérance $(P_2, P, P_2, \oplus, \otimes)$. Il s'écrit :

$$AEU(\pi) = \bigoplus_{x \in X} \pi(x) \otimes u(x)$$

où $u : X \to P_2$ est la fonction d'utilité.

Comme $(P, \oplus, \otimes, 0_P, 1_P)$ est un semi-anneau, les conditions B_1-B_4 sont naturellement satisfaites. Remarquons que notre approche rend compte clairement de la manière dont le domaine d'espérance est construite.

Nous introduisons maintenant le premier jeu d'axiomes, qui est une reformulation dans un cadre vNM des axiomes proposés par [GS04] et sont similaires à ceux de [LR57] :

R (Réduction de loteries)

$$\forall x \in X, [\lambda_1/\pi_1, \ldots, \lambda_m/\pi_m](x) = \bigoplus_{i=1}^{m} \lambda_i \otimes \pi_i(x).$$

C_1 (Préordre) $\succsim$ est reflexive et transitive.

C_2 (Ordre sur les loteries binaires)
$\alpha \geq_2 \beta \Leftrightarrow [\alpha_1/\overline{x}, \alpha_2/\underline{x}] \succsim [\beta_1/\overline{x}, \beta_2/\underline{x}]$.

C_3 (Substituabilité)
$\forall i = 1 \ldots k$, $\pi_i \sim \pi'_i$, $\lambda_i \in P$, tels que $\bigoplus_{i=1}^k \lambda_i = 1_P \Rightarrow [\lambda_1/\pi_1, \ldots, \lambda_k/\pi_k] \sim [\lambda_1/\pi'_1, \ldots, \lambda_k/\pi'_k]$.

C_4 (Continuité sur les conséquences)
$\forall x \in X, \exists \alpha \in P_2$ tel que $x \sim [\alpha_1/\overline{x}, \alpha_2/\underline{x}]$.

L'axiome R permet de réduire les loteries composées en des loteries simples. Sous cette condition, nous avons $\Pi(X) = \Pi^\infty(X)$. L'axiome C_1 est une hypothèse classique d'ordre. Toutefois, le préordre n'est pas supposé

complet. L'axiome C_2 impose un ordre sur les loteries binaires. Cet ordre peut être considéré comme plutôt naturel car les loteries ayant une haute plausibilité d'obtenir la meilleure conséquence et une basse plausibilité d'obtenir la pire conséquence sont préférées. L'axiome C_3 affirme que remplacer des sous-loteries par des sous-loteries qui leur sont équivalentes dans une loterie composée donne des loteries équivalentes. L'axiome C_4 affirme que toute conséquence est équivalente à une loterie binaire.
Utilisant ce jeu d'axiomes, le théorème de représentation suivant pour AEU peut être énoncé :

Theorem 1 *Sous la condition R, la relation de préférence $\succsim$ sur $\Pi^{\infty}(X)$ satisfait les axiomes C_1-C_4 ssi il existe une fonction d'utilité $u : X \to P_2$ tel que*

$$\forall \pi, \pi' \in \Pi^{\infty}(X), \pi \succsim \pi' \Leftrightarrow AEU(\pi) \geq_2 AEU(\pi').$$

Proof. Nous esquissons la démonstration, qui est plutôt classique. La partie nécessaire provient de la définition de AEU et de l'échelle binaire P_2. Pour la partie suffisante, l'axiome C_4 affirme que toute loterie dégénérée, *i.e.*une conséquence, est équivalente à une loterie simple. Sous la condition R, C_3 implique que toute loterie peut également être réduite à une loterie binaire. L'axiome C_1 permet de comparer les loteries via leurs loteries binaires associées. Enfin, C_2 impose l'ordre sur les loteries. ∎

Nous présentons maintenant le second jeu d'axiomes.

D_1 (Préordre) $\succsim$ est réflexive et transitive.

D_2 (Non trivialité)
$[\lambda/\overline{x}, \mu/\underline{x}] \sim [\lambda'/\overline{x}, \mu'/\underline{x}] \Rightarrow (\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu')$

D_3 (Indépendence faible)
$\pi_1 \succsim \pi_2 \Rightarrow \forall \alpha \in P_2, [\alpha_1/\pi_1, \alpha_2/\pi] \succsim [\alpha_1/\pi_2, \alpha_2/\pi]$.

D_4 (Continuité)
$\pi_1 \succ \pi_2 \succ \pi_3 \Rightarrow \exists \alpha \in P_2, [\alpha_1/\pi_1, \alpha_2/\pi_3] \sim \pi_2$.

L'axiome D_1 est identique à l'axiome C_1. L'axiome D_2 évite le cas trivial où toutes les loteries sont équivalentes. Les autres axiomes sont inspirés par le jeu d'axiomes présenté par [Mac88]. L'axiome D_3 affirme que dans une loterie, remplacer une sous-loterie par une sous-loterie qui lui est préférée ne peut pas dégrader la loterie. En décision séquentielle, cet axiome a une interprétation naturelle. Il dit que si une alternative est préférée à une autre à un certain moment, elle le restera à tout autre instant. Remarquons que l'axiome D_3 écrit avec k sous-loteries serait une version plus forte de C_3 car il l'impliquerait. Cependant, utiliser explicitement cet axiome permet de mettre en valeur cette propriété fondamentale de AEU. L'axiome D_4 affirme que toute paire de loteries peut être combinée de telle sorte que la combinaison soit équivalente à toute loterie comprise entre elles. Cet axiome est plus fort que C_4 et pourrait être remplacé par ce dernier. Cependant, encore une fois, utiliser cette version plus forte permet de souligner cette autre propriété de AEU. Ces axiomes sont bien connus en théorie de la décision et fait ressortir la manière dont le décideur construit ses préférences. Notons que dans ce jeu d'axiomes, l'ordre sur les loteries binaires n'est pas imposé. Il découlera de l'ensemble des axiomes.
Pour cette deuxième axiomatisation, nous avons besoin d'ajouter deux conditions de solvabilité pour que certaines équations aient des solutions dans le semi-anneau.

E_1 $\forall \alpha, \beta \in P_2, \alpha \geq \beta \Rightarrow \exists \lambda \in P, \begin{cases} \alpha_1 & = & \beta_1 \oplus \lambda \\ \beta_2 & = & \alpha_2 \oplus \lambda \end{cases}$

E_2 $\forall \lambda, \mu \in P, \exists \alpha \in P_2, (\lambda \oplus \mu) \otimes \alpha = \langle \lambda, \mu \rangle$.

La condition E_1 dit que que pour toute paire de couples dans P_2, il est possible de dégrader le meilleur couple sur son second élement et d'améliorer le moins bon sur son premier élément par une même quantité. La condition E_2 impose que toute somme de deux éléments de P peut se décomposer avec un couple de P_2. Ces conditions impliquent que le semi-anneau P possède une certaine régularité.
Elles sont naturellement satisfaites pour tous les exemples de mesures de plausibilité donnés en section 2, sauf pour les probabilités symboliques dans le cas général.
Les deux prochains lemmes nous seront utiles pour démontrer le second théorème de représentation. Le premier énonce que sous certaines conditions, D_3 implique C_3.

Lemma 1 *Les conditions R, E_1, E_2 et l'axiome $D_3 \Rightarrow C_3$.*

Proof. Nous montrons d'abord par récurrence que la condition E_2 peut s'écrire pour tout nombre d'éléments : $\forall i = 1 \dots k, \lambda_i \in P$, $\exists \alpha_i \in P$, $\bigoplus_{i=1}^{k} \alpha_i = 1_P$, tels que $(\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i) \otimes \alpha_i = \lambda_i, \forall i = 1 \dots k$. Cela est vrai pour $k = 2$ par E_2. Supposons que cela est vrai pour k. Soient $\forall i = 1 \dots k+1, \lambda_i \in P$. Appliquons le cas $k = 2$ sur $\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i$ et λ_{k+1}. Nous avons $\beta \in P_2$ tel que $(\bigoplus_{i=1}^{k+1} \lambda_i) \otimes \beta = \langle \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i, \lambda_{k+1} \rangle$. Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence sur $\lambda_i, \forall i = 1 \dots k$. Nous obtenons $\forall i = 1 \dots k, \gamma_i \in P$, $\bigoplus_{i=1}^{k} \gamma_i = 1_P$, $\forall i = 1 \dots k, (\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i) \otimes \gamma_i = \lambda_i$. Alors avec $\forall i = 1 \dots k, \alpha_i = \beta_1 \otimes \gamma_i$ et $\alpha_{k+1} = \beta_2$, la propriété est vérifiée.
Nous démontrons maintenant le lemme, également par récurrence. Pour $k = 2$, cela est vrai par l'axiome D_3. Supposons que cela est vrai pour k. Soient pour tout $i = 1 \dots k+1, \pi_i, \pi_i' \in \Pi^{\infty}(X), \pi_i \sim \pi_i'$ et pour tout $i = 1 \dots k+1, \lambda_i \in P, \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i = 1_P$. Appliquons l'extension de la condition D_2 sur λ_i pour $i = 1 \dots k$. Nous obtenons les α_i. Appliquons l'hypothèse de récurrence sur les loteries d'indices $i = 1 \dots k$ et les α_i. Nous obtenons $[\alpha_1/\pi_1, \dots, \alpha_k/\pi_k] \sim [\alpha_1/\pi_1', \dots, \alpha_k/\pi_k']$. Maintenant appliquons le cas $k = 2$ avec $\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i$ et λ_{k+1}. Par l'axiome R, nous obtenons la propriété désirée. ∎

Le second lemme montre que les loteries avec une haute plausibilité d'obtenir la meilleure conséquence et une basse plausibilité d'obtenir la pire conséquence sont préférées. Il donne une des implications de l'axiome C_2.

Lemma 2 *Sous les conditions R, E_1 et E_2, axiomes D_1 et D_3, pour tout $\alpha, \beta \in P_2$, nous avons $(\alpha_1 \geq \beta_1$ et $\beta_2 \geq \alpha_2)$ $\Rightarrow [\alpha_1/\overline{x}, \alpha_2/\underline{x}] \succsim [\beta_1/\overline{x}, \beta_2/\underline{x}]$.*

Proof. Par hypothèse, nous avons deux conséquences $\overline{x}$ et $\underline{x}$ tels que $\overline{x}\succsim\underline{x}$. Par D_3, pour $\pi \in \Pi(X)$, $(\lambda, \mu) \in P_2$, $[\lambda/\overline{x}, \mu/\pi]\succsim[\lambda/wX, \mu/\pi]$. Prenons $\pi = [\lambda'/\overline{x}, \mu'/\underline{x}]$. Par R, $[\lambda\oplus\mu\otimes\lambda'/\overline{x}, \mu\otimes\mu'/\underline{x}]\succsim[\mu\otimes\lambda'/\overline{x}, \lambda\oplus\mu\otimes\mu'/\underline{x}]$.
Nous voulons résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{lllllll} \alpha_1 & = & \lambda\oplus\beta_1 & (1) & \alpha_2 & = & \mu\otimes\mu' & (3) \\ \beta_1 & = & \mu\otimes\lambda' & (2) & \beta_2 & = & \lambda\oplus\alpha_2 & (4) \end{array}$$

Les équations 2 et 3 donnent $\mu = \alpha_2\oplus\beta_1$. Les conditions E_1 et E_2 donnent λ, λ' et μ'.

■

Le second théorème de représentation peut alors se formuler comme suit :

Theorem 2 *Sous les conditions R, E_1 et E_2, la relation de préférence $\succsim$ sur $\Pi^\infty(X)$ satisfait les axiomes D_1-D_4 ssi il existe une fonction d'utilité $u : X \to P_2$ telle que*

$$\forall \pi, \pi' \in \Pi^\infty(X), \pi \succsim \pi' \Leftrightarrow AEU(\pi) \geq_2 AEU(\pi').$$

Proof. Pour la partie nécessaire, supposons que AEU représente la relation de préférence. Les axiomes D_1 et D_2 sont naturellement satisfaits. L'axiome D_3 découle de la structure de semi-anneau de P (distributivité de $\otimes$ sur $\oplus$) et la condition R. Pour l'axiome D_4, prenons $\pi_1 \succ \pi_2 \succ \pi 3$ tels que $AEU(\pi_1) = \alpha$, $AEU(\pi_2) = \beta$ et $AEU(\pi_3) = \gamma$. Pour tout $\langle\lambda, \mu\rangle \in P_2$, calculons $AEU([\lambda/\pi_1, \mu/\pi_3]) = \langle\lambda\otimes\alpha_1\oplus\mu\otimes\gamma_1, \lambda\otimes\alpha_2\oplus\mu\otimes\gamma_2\rangle$. Cherchons $\langle\lambda, \mu\rangle$ dans P_2 pour que les deux équations suivantes soient vérifiées $\lambda\otimes\alpha_1\oplus\mu\otimes\gamma_1 = \beta_1$ et $\lambda\otimes\alpha_2\oplus\mu\otimes\gamma_2 = \beta_2$. Par hypothèse, $\alpha \geq_2 \beta \geq_2 \gamma$. Alors il existe $\nu, \xi \in P$ tels que $\langle\alpha_1, \alpha_2\oplus\nu\rangle = \langle\beta_1\oplus\nu, \beta_2\rangle$ et $\langle\beta_1, \beta_2\oplus\xi\rangle = \langle\gamma_1\oplus\xi, \gamma_2\rangle$. En réarrangeant ces équations, nous obtenons l'équation $\langle\alpha_1, \alpha_2\oplus\nu\oplus\xi\rangle = \langle\gamma_1\oplus\nu\oplus\xi, \gamma_2\rangle$. En utilisant ces égalités et en supposant que $\lambda\oplus\mu = 1_P$, le système d'équations devient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma_1\oplus\lambda\otimes(\nu\oplus\xi) & = & \gamma_1\oplus\xi \\ \alpha_2\oplus\mu\otimes(\nu\oplus\xi) & = & \alpha_2\oplus\nu \end{array} \right.$$

Alors si une solution existe pour ces deux équations :

$$\lambda\otimes(\nu\oplus\xi) = \xi \qquad \mu\otimes(\nu\oplus\xi) = \nu$$

une solution existe pour le premier système. Par la condition E_2, il existe $\langle\lambda, \mu\rangle \in P_2$ verifiant les équations précédentes, ce qui finit la preuve de l'axiome D_4.
Nous esquissons la démonstration de la partie suffisante, qui est plutôt classique. L'axiome D_4 implique que toute loterie dégénérée, autrement dit toute conséquence, est équivalente à une loterie binaire. Alors le lemme 1 et l'axiome R implique que toute loterie peut être réduite à une loterie binaire. L'axiome D_1 permet de comparer les loteries via leurs loteries binaires associées. Enfin, l'axiome D_2 avec le lemme 2 donne l'implication opposée du lemme, ce qui définit l'ordre sur $\Pi^\infty(X)$. ■

Le théorème 2 utilise des axiomes plus simples et plus naturels que le théorème 1 mais nécessite deux conditions de solvabilité. Les deux théorèmes permettent de dériver le critère AEU dès que la représentation de l'incertain satisfait nos conditions. Le critère obtenu peut être vu comme la contrepartie de EU dans la représentation de l'incertain choisie. A titre d'exemple de l'intérêt et de l'utilité de nos résultats, nous donnons deux applications simples. [Wey94] a proposé les quasi-mesures comme mesures générales de l'incertain. A notre connaissance, aucun modèle de décision n'a été proposé pour ces mesures. Ils satisfont toutes les conditions du théorème 2. Alors AEU peut être construit avec ces quasi-mesures. [BBD91] ont considéré les probabilités lexicographiques (qui sont des vecteurs de probabilités qui sont comparées lexicographiquement) et ont dérivé l'utilité espérée lexicographique. Il est facile de vérifier que l'utilité espérée lexicographique est une utilité espérée algébrique. Dans la même veine, on pourrait considérer des mesures de plausibilité lexicographiques et dériver une utilité espérée algébrique lexicographique grâce aux théorèmes précédents. De tels modèles n'ont pas encore été étudiés.

4 Propriétés de AEU

L'utilité espérée algébrique jouit des mêmes propriétés que EU : linéarité, cohérence dynamique, autodualité de la représentation sous-jacente de l'incertain, autodualité du critère de décision et modélisation de l'attitude du décideur face à l'incertain[1].

4.1 Linéarité et cohérence dynamique

Tout d'abord, de manière évidente, AEU vérifie la propriété de linéarité. Dans le cas de deux conséquences, la propriété s'écrit, pour tout $\lambda, \mu \in P$ et tout $x, x' \in X$, nous avons $AEU([\lambda/x, \mu/x']) = \lambda\otimes AEU(x)\oplus\mu\otimes AEU(x')$. Cette formule peut, bien entendu, s'étendre à un nombre quelconque de conséquences. Remarquons que cette propriété découle de l'axiome d'indépendance.
Cette propriété peut être étendue à $\Pi^\infty(X)$. Pour les loteries composées avec deux sous-loteries, elle s'écrit, pour tout $\langle\lambda, \mu\rangle \in P_2$ et pour tout $\pi, \pi' \in \Pi^\infty(X)$, $AEU([\lambda/\pi, \mu/\pi']) = \lambda\otimes AEU(\pi)\oplus\mu\otimes AEU(\pi')$. De nouveau, elle peut être étendue à toute loterie composée avec un nombre quelconque de loteries. Elle implique alors que AEU vérifie la cohérence dynamique. La cohérence dynamique est une propriété utile en décision séquentielle. Elle affirme que si le décideur préfère une alternative à une autre à un instant donné alors cela sera le cas à tout autre instant. Cette propriété permet l'intégration simple et naturelle de AEU dans les modèles de décision séquentielle, comme les processus de décision markoviens ([PSW05]).

4.2 Autodualité de la représentation de l'incertain

Le *dual* d'un préordre $\succsim_S$ sur les évènements $\mathcal{F}$ est une relation $\succsim_S{}^T$ définie par $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \succsim_S{}^T B$ si et seulement si $\overline{B}\succsim_S\overline{A}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont the complémentaires de A

[1]Nous remercions Patrice Perny pour la suggestion de cette propriété.

et B. Naturellement le dual du dual du préordre est le préordre lui-même.

Le préordre $\succsim_S$ est *autodual* si et seulement si pour toute paire d'évènements (A, B), $A \succsim_S B \Leftrightarrow \overline{B} \succsim_S \overline{A}$. Pour de tel préordre autodual, cela signifie que A est plus plausible que B si et seulement si le complémentaire de B est plus plausible que celui de A.

La dualité et l'autodualité peuvent naturellement être étendues aux mesures de plausibilité. Une mesure de plausibilité est le dual d'une autre si et seulement si leurs préordres induits sur les évènements sont duaux l'un de l'autre. Les mesures de possibilité et de nécessité et les fonctions de croyance et de plausibilité sont deux exemples de couples de mesures duales l'une de l'autre. Une mesure de plausibilité est autoduale si son préordre induit est autodual. Une mesure de probabilité est autoduale.

Une mesure autoduale donne plus d'information qu'une mesure non autoduale. En effet, pour une mesure autoduale, les deux affirmations suivantes sont équivalentes : A plus plausible que B et le complémentaire de B plus plausible que celui de A. Dans le cas d'une mesure non-autoduale, il n'y a pas de relation entre ces deux affirmations. Et ainsi, avoir A plus plausible que B ne donne aucune information sur les plausibilités de $\overline{A}$ et $\overline{B}$. De ce fait, une mesure de plausibilité non autoduale n'utilise pas toute l'information à sa disposition puisqu'il serait possible de la raffiner avec sa mesure duale. Par conséquent, une mesure de plausibilité autoduale devrait être privilégiée.

Heureusement, à partir d'une mesure non autoduale Pl, une mesure autoduale peut être construite. En effet, il suffit de prendre la mesure σ_{Pl} définie par le couple $\sigma_{\mathrm{Pl}}(A) = \langle \mathrm{Pl}(A), \mathrm{Pl}(\overline{A}) \rangle, \forall A \in \mathcal{F}$. Ces valeurs sont comparées en utilisant l'ordre $\geq_2$. Il est facile de vérifier que c'est une mesure de plausibilité autoduale. En général, cette mesure n'induit pas une relation complète sur les évènements, même si Pl définit un ordre complet. C'est le cas, par exemple, pour le couple défini par les fonctions de croyance et de plausibilité. Notons que si Pl est une mesure de probabilité, alors la mesure σ_{Pl} contient la même information que Pl et elles sont donc équivalentes.

Nous montrons maintenant qu'un décideur utilisant AEU utilise une représentation de l'incertain autoduale. Pour toute paire d'évènements A, B, considérons les actes binaires $\overline{x}A\underline{x}$ et $\overline{x}B\underline{x}$ où l'acte $\overline{x}A\underline{x}$ donne la meilleure conséquence $\overline{x}$ si l'évènement A se réalise et la pire conséquence $\underline{x}$ sinon et l'acte $\overline{x}A\underline{x}$ donne $\overline{x}$ si B se réalise et $\underline{x}$ autrement. L'acte $\overline{x}B\underline{x}$ préféré à $\overline{x}B\underline{x}$ signifie que le décideur croit que A est plus plausible que B. Ainsi la comparaison de tels actes définit un préordre sur les évènements. Notons que $AEU(\overline{x}A\underline{x}) = \sigma_{\mathrm{Pl}}(A) = \langle \mathrm{Pl}(A), \mathrm{Pl}(\overline{A}) \rangle$. Par conséquent, même si le décideur a utilisé initialement une mesure de plausibilité non autoduale Pl, il exploite toute l'information à sa disposition, fournie par Pl, pour classer les évènements quand il prend ses décisions avec AEU en utilisant σ_{Pl}. Cette caractéristique de AEU est particulièrement intéressante quand des mesures non autoduales sont utilisées pour représenter l'incertain.

4.3 Autodualité du critère de décision

Les propriétés de dualité et d'autodualité peuvent aussi s'énoncer sur les relations de préférence sur les actes. Comme le préordre sur les conséquences n'est pas supposé complet, l'extension de ces définitions est un peu délicate. Nous avons besoin de supposer que les préférences sur les actes proviennent des préférences sur les conséquences. Pour tout préordre $\succsim$ sur les actes $\mathcal{A}$ et tout préordre $\succsim_X$ sur les conséquences X, notons $\succsim(\succsim_X)$ le préordre sur les actes quand les conséquences sont considérées dans leur ordre naturel et notons $\succsim(\precsim_X)$ le préordre sur les actes quand les conséquences sont considérées dans leur ordre opposé, *i.e.*les mauvaises conséquences sont supposées plus attractives que les bonnes.

Le *dual* d'une relation de préférence $\succsim(\succsim_X)$, que nous notons $\succsim^T(\succsim_X)$ est défini par $f \succsim^T(\succsim_X) g \Leftrightarrow g \succsim(\precsim_X) f$. Intuitivement quand un acte f est préféré à un acte g dans le sens de $\succsim^T(\succsim_X)$, cela signifie que quand on préfere les mauvaises conséquences, g est mieux classé que f. De nouveau, le dual du dual d'une relation de préférence est la relation elle-même. Par extension, un critère de décision est le dual d'un autre si et seulement si la relation de préférence définie par le premier critère est le dual de la relation définie par le second. A titre d'exemple, l'utilité pessimiste est le dual de l'utilité optimiste.

Une relation de préférence est *autoduale* si et seulement si $\succsim^T(\succsim_X) = \succsim(\succsim_X)$, ce qui signifie que pour toute paire d'actes f, g, $f \succsim(\succsim_X) g \Leftrightarrow g \succsim(\precsim_X) f$. Encore une fois, par extension, un critère de décision est autodual si et seulement si sa relation de préférence induite est autoduale. Intuitivement, cela signifie qu'un tel critère de décision, pour comparer deux actes, tient compte de la manière dont ces actes se comportent sur les bonnes et les mauvaises conséquences. Comme précédemment, tout critère de décision non autodual n'utilise pas toute l'information à sa disposition puisqu'il serait possible de le raffiner avec le critère dual. Dans ce sens, un décideur rationnel préférera un critère de décision autodual. A titre d'exemple, EU est autodual. Etant défini comme un couple, un élément concernant la meilleure conséquence et l'autre la pire, on peut facilement vérifié que AEU est autodual.

4.4 Modélisation de l'attitude du décideur

Avec EU, l'attitude face au risque peut être intégrée au modèle en imposant une certaine forme à la fonction d'utilité. Quand la fonction d'utilité est concave, le décideur a une aversion pour le risque. Il préférera des conséquences certaines à des conséquences risquées. Au contraire, quand la fonction d'utilité est convexe, le décideur a un goût pour le risque. La modélisation de l'attitude du décideur face au risque repose sur la manière dont les valeurs d'utilité sont affectées aux conséquences. En façonnant la fonction d'utilité, l'attitude du décideur peut être intégrée dans le modèle de décision.

Cette idée peut naturellement se transposer dans AEU. Le choix d'une fonction d'utilité permet de prendre en compte l'attitude du décideur face à l'incertain. Nous illustrons cette propriété par un exemple simple. Soient y_1, y_2, y_3 trois conséquences telles que $y_1 \succ_X y_2 \succ_X y_3$. Soit $\pi = [\lambda/y_1, \mu/y_3]$. Soit $u^= : X \to P_2$ une fonction d'utilité telle que $AEU_{u^=}(\pi) = u(y_2)$. Un décideur dont les préférences et l'attitude face à l'incertain sont modélisées par $u^=$ considère que l'alternative incertaine π et la conséquence certaine y sont équivalentes. Considérons maintenant $u^+ : X \to P_2$ une fonction d'utilité telle que $\forall x \in X, u^+(x) = u^=(x)$ si $y_2 \succsim_X x$ et $u^+(x) \geq_2 u^=(x)$ sinon. Alors, de manière évidente, $AEU_{u^+}(\pi) \geq_2 u^+(y_2)$ par monotonie des opérateurs. Un décideur dont les préférences sont modélisées par u^+ préférera l'alternative incertaine à la conséquence certaine. En ce sens, il a un goût pour l'incertain plus prononcé que le décideur utilisant $u^=$. Au contraire, avec $u^- : X \to P_2$ une fonction d'utilité telle que $\forall x \in X, u^-(x) = u^=(x)$ si $x \succsim_X y_2$ et $u^=(x) \geq_2 u^-(x)$ sinon, y_2 sera préférée. Une telle attitude est plus adversaire à l'incertain que celle induite par $u^=$.

Notons que cette propriété se vérifie pour l'utilité binaire possibiliste. [GS01] ont montré que quand toutes les utilités des conséquences sont élevées, l'utilité binaire possibiliste se réduit à l'utilité pessimiste. En revanche, quand toutes les utilités sont basses, l'utilité binaire possibiliste se réduit à l'utilité optimiste. En plus de leurs résultats, notre travail suggère que le degré d'optimisme ou de pessimisme peut être controlé plus finement par une affectation judicieuse des utilités aux conséquences.

5 Travaux similaires

De nombreux modèles de décision proposés précédemment sont des instances d'utilité espérée algébrique. Nous listons ici quelques exemples :

- l'utilité espérée classique,
- l'utilité espérée lexicographique introduite par [BBD91],
- les critères de décision proposés dans [GS00, GS01, GS02] pour respectivement les kappa fonctions, les possibilités qualitatives et les possibilités quantitatives,
- les utilités optimistes et pessimistes ([DP95]),
- les critères maximax et maximin,
- l'utilité pessimiste rafinée par l'utilité optimiste axiomatisée par [DGPZ00],
- l'utilité possibiliste raffinée proposée par [Wen05],
- le modèle de décision proposé par [Wil95] sur les réels étendus. Notre travail donne une fondation axiomatique de cette proposition.
- le critère de décision proposé par [GS04] car les probabilités symboliques sont des mesures de plausibilité.

[GS03] ont proposé un critère de décision pour les fonctions de croyance partiellement consonantes, qui sont une généralisations à la fois des probabilités et des possibilités. Plus précisément, ils considèrent les fonctions de croyance partiellement consonantes de la forme d'une distribution de probabilité sur des distributions de possibilité sur les conséquences. Pour ces mesures à deux niveaux, ils ont appliqué l'idée d'utilité binaire deux fois pour obtenir un critère de décision qui est formellement proche d'une utilité binaire algébrique, puisque le critère peut être vu comme un AEU à deux niveaux. Cela suggère que des critères de décision plus généraux pourraient être définis en utilisant une distribution de plausibilité sur d'autres distributions de plausibilité sur des conséquences et en appliquant le théorème 2 deux fois. Un travail intéressant serait d'étudier la possibilité de trouver une mesure de plausibilité à un seul niveau qui définirait un AEU équivalent à un AEU à deux niveaux.

Plus récemment, [GS04] ont proposé un modèle de décision général similaire au notre en utilisant les probabilités symboliques comme représentation de l'incertain. Ils ont mené leur axiomatisation dans un cadre similaire à celui de [Sch89] qui a utilisé le cadre présenté par [AA63]. Ce cadre est justifié si l'on veut justifier axiomatiquement l'utilisation de probabilité subjective ou plus généralement de l'utilisation de mesures de plausibilité subjectives. En effet, dans le contexte de problèmes de décision, Anscombe et Aumann ont dérivé les probabilités subjectives additives et axiomatisé l'utilité espérée subjective. Schmeidler a généralisé ce résultat en relaxant certains axiomes et a obtenu d'une part les probabilités subjectives (non nécessairement additives) et l'utilité espérée de Choquet. Cependant, dans ce cadre, [GS04] n'ont pas dérivé de mesures de plausibilité subjectives. Ainsi le choix de ce cadre n'est pas, à notre avis, le plus adapté pour une axiomatisation dans le cas où la mesure de plausibilité est supposée connue. Dans ce cas de figure, un cadre vNM est préférable. Par conséquent, nos deux axiomatisations ont été formulées dans ce cadre. La première est similaire à celui de Giang et Sandilya. Nous avons simplement reformulé leurs axiomes dans le cadre vNM. La seconde axiomatisation nécessitant deux conditions de solvabilité utilise des axiomes plus simples et donne une meilleure compréhension des propriétés de AEU. Dans ce second jeu d'axiomes, B_2, qui définit un ordre sur les loteries binaires, n'est pas artificiellement imposé. Cette ordre découle naturellement du jeu d'axiomes, *i.e.*du comportement du décideur et de la manière dont il construit ses préférences.

Notons que notre travail montre que AEU est formellement différent de CEU puisque CEU utilise une mesure de plausibilité non décomposable.

6 Conclusion

Nous avons proposé deux justifications axiomatiques pour une classe d'utilité espérée généralisée que nous avons nommée l'utilité espérée algébrique. Ces axiomatisations ont été menées dans un cadre vNM, *i.e.*la représentation de l'incertain est supposée connue et il est supposé modélisé par une mesure de plausibilité. Notre seconde axiomatisation est particulièrement intéressante. Bien que nécessitant deux conditions de solvabilité, il utilise des axiomes simples et naturels (préordre, non trivialité, indépendance faible et continuité), qui sont proches de ceux présentés dans [Mac88] pour EU.

Notre approche générale algébrique a permis d'unifier de nombreuses propositions précédentes similaires à EU dans un même formalisme. A partir de toute représentation de l'incertain satisfaisant nos conditions, l'utilité espérée algébrique peut être construite. Cela est particulièrement intéressant pour les représentations de l'incertain pour lesquelles un modèle de décision n'a pas encore été proposé.

Nous avons enfin montré qu'ayant l'utilité espérée classique comme cas particulier, AEU jouit des mêmes propriétés que EU : linéarité, cohérence dynamique, autodualité de la représentation sous-jacente de l'incertain, autodualité du critère de décision, modélisation de l'attitude du décideur face à l'incertain. Comme il a été souligné, ce critère s'intégre simplement dans des problèmes de décision séquentielle, notamment avec les processsus de décision markoviens ([PSW05]).

Références

[AA63] F.J. Anscombe and R.J. Aumann. A definition of subjective probability. *The annals of mathematical statistics*, 34 :199–205, 1963.

[All53] M. Allais. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats de l'école américaine. *Econometrica*, 21 :503–546, 53.

[BBD91] L. Blume, A. Brandenburger, and E. Dekel. Lexicographic probabilities and choice uncertainty. *Econometrica*, 59(1) :61–79, 1991.

[BMR+99] S. Bistarelli, U. Montanari, F. Rossi, T. Schiex, G. Verfaillie, and H. Fargier. Semiring-based CSPs and valued CSPs : Frameworks, properties and comparison. *Constraints*, 4 :199–240, 1999.

[CH03] F.C. Chu and J.Y. Halpern. Great expectations. part i : On the customizability of generalized expected utility. In *IJCAI*, volume 18, pages 291–296, 2003.

[DG92] A. Darwiche and M.L. Ginsberg. A symbolic generalization of probability theory. In *AAAI*, volume 10, pages 622–627, 1992.

[DGPZ00] D. Dubois, L. Godo, H. Prade, and A. Zapico. Advances in qualitative decision theory : refined rankings. *Lecture notes in AI*, 1952(11) :427–436, 2000.

[DP90] D. Dubois and H. Prade. An introduction to possibilistic and fuzzy logics. In *Readings in Uncertain Reasoning*, pages 742–761. Morgan Kaufmann, 1990.

[DP95] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory as a basis of qualitative decision theory. In *IJCAI*, volume 14, pages 1925–1930, 1995.

[Ell61] D. Ellsberg. Risk, ambiguity, and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75 :643–669, 1961.

[FH95] N. Friedman and J. Halpern. Plausibility measures : A user's guide. In *UAI*, volume 11, pages 175–184, 1995.

[Fis70] P. Fishburn. *Utility theory for decision making*. Wiley, 1970.

[GMV84] M. Gondran, M. Minoux, and S. Vajda. *Graphs and algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., 1984.

[GP92] M. Goldszmidt and J. Pearl. Rank-based systems : a simple approach to belief revision, belief update and reasoning about evidence and actions. In *KR*, volume 3, pages 661–672, 1992.

[GS00] P.H. Giang and P.P. Shenoy. A qualitative linear utility theory for spohn's theory of epistemic beliefs. In *UAI*, volume 16, pages 220–229, 2000.

[GS01] P.H. Giang and P.P. Shenoy. A comparison of axiomatic approaches to qualitative decision making using possibility theory. In *UAI*, volume 17, pages 162–170, 2001.

[GS02] P.H Giang and P.P. Shenoy. Statistical decisions using likelihood information without prior probabilities. In *UAI*, volume 18, pages 170–178, 2002.

[GS03] P.H. Giang and P.P. Shenoy. Decision making with partially consonant belief functions. In *UAI*, volume 19, pages 272–280, 2003.

[GS04] P.H. Giang and S. Sandilya. Decision making for symbolic probability. In *UAI*, volume 20, pages 185–192, 2004.

[Hal01] Halpern01. Conditional plausibility measures and Bayesian networks. *J. Artificial Intelligence Research*, 14 :359–389, 2001.

[JW93] J.Y. Jaffray and P. Wakker. Decision making with belief functions : Compatibility and incompatibility with the sure-thing principle. *J. of Risk and Uncertainty*, 7(3) :255–71, 1993.

[Leh96] D. Lehmann. Generalized qualitative probability : Savage revisited. In *UAI*, volume 12, pages 381–388, 1996.

[LR57] R.D. Luce and H. Raiffa. *Games and Decisions*. J. Wiley, New York, 1957.

[Mac88] M.J. Machina. Expected utility hypothesis. In J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman, editors, *The New Palgrave : A Dictionary of Economics*, pages 232–239. Macmillan, 1988.

[PSW05] P. Perny, O. Spanjaard, and P. Weng. Algebraic markov decision processes. In *IJCAI*, volume 19, pages 1372–1377, 2005.

[Sch89] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57 :571–587, 1989.

[Sha76] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press, 1976.

[Spo88] W. Spohn. A general non-probabilistic theory of inductive reasoning. In *UAI*, volume 4, 1988.

[vNM44] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1944.

[Wen05] Paul Weng. Qualitative decision making under possibilistic uncertainty : Toward more discriminating criteria. In *UAI*, volume 21, 2005.

[Wey94] E. Weydert. General belief measures. In *UAI*, volume 10, pages 575–582, 1994.

[Wil95] N. Wilson. An order of magnitude calculus. In *UAI*, volume 11, pages 548–555, 1995.