Article invité

Décision et optimisation combinatoire

Olivier Spanjaard [1]
Olivier.Spanjaard@lip6.fr

Introduction

La plupart du temps, la complexité des problèmes d'AD et de RO tient principalement à trois sources de difficulté. Tout d'abord, on peut être amené à prendre en compte plusieurs critères conflictuels (e.g., pour une décision publique, les impacts sociaux, environnementaux etc. sont rarement en adéquation). Une autre source de difficulté est le caractère souvent imprécis de l'information dont on dispose (e.g., le guidage d'un robot mobile équipé de capteurs dans un environnement mal connu). Enfin, une troisième source de difficulté peut être le nombre combinatoire de solutions potentielles.

Les deux premières sources de difficulté renvoient à une *préoccupation de modélisation.* Il s'agit d'étudier, d'une part la représentation des objets sur lesquels portent les préférences, d'autre part la représentation de l'information préférentielle guidant la décision. Les modèles formels développés en théorie de la décision tentent de répondre à cette préoccupation en dépassant le modèle décisionnel classique dont le pouvoir descriptif s'avère bien souvent insuffisant. La troisième source de difficulté, quant à elle, renvoie à une *préoccupation algorithmique.* Le problème ayant été modélisé, il s'agit de le résoudre efficacement malgré la dimension prohibitive de l'espace des solutions. De nombreuses réponses sont apportées par les travaux en algorithmique pour les problèmes combinatoires.

La réalité nous confronte souvent à des situations où plusieurs de ces difficultés coexistent : on rencontre des problèmes qui mêlent des aspects multicritères et combinatoires, incertains et combinatoires, voire les trois à la fois. On est alors amené à prendre en compte simultanément les préoccupations de modélisation et d'algorithmique.

Le modèle décisionnel classique

Nous présentons ici le modèle décisionnel classique pour en pointer les limites. Nous appelons *problème combinatoire discret* tout problème où il faut optimiser une fonction objectif sur un ensemble fini mais très grand de solutions réalisables, défini implicitement comme une sous-famille de l'ensemble des parties d'un ensemble fini de *composantes élémentaires* (e.g., arcs ou arêtes dans les graphes). La plupart du temps, dans les problèmes valués (i.e., pour lesquels on a défini une fonction de valuation f sur les composantes élémentaires), la valeur $f(S)$ d'une solution S se définit comme la somme des valeurs de ses composantes élémentaires (e.g., dans le problème du sac-à-dos, la valeur d'un sac est la somme des valeurs des objets qui le composent). Une solution S_1 est *préférée* à une solution S_2 (noté $S_1 \succsim S_2$) si $f(S_1) \leq f(S_2)$; S_1 est *strictement préférée* à S_2 (noté $S_1 \succ S_2$) si l'inégalité est stricte ; S_1 et S_2 sont *indifférentes* (noté $S_1 \sim S_2$) si $f(S_1) = f(S_2)$[2]. L'usage d'une telle fonction f n'est pas sans conséquence sur la structure de préférence résultante, comme le montre le résultat suivant issu de la théorie du mesurage extensif [10] :

Théorème 1 (Roberts et Luce, 1968) *Soient A un ensemble non vide, $\succsim$ une relation binaire sur A, et $\circ$ un opérateur binaire de concaténation fermé sur A. On peut représenter numériquement une relation binaire $\succsim$ sur A par une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $a, b \in A$:*
i) $a \succsim b \iff f(a) \leq f(b)$
ii) $f(a \circ b) = f(a) + f(b)$
ssi les hypothèses suivantes sont vérifiées :
H_1 : $\succsim$ *est un préordre complet*
H_2 : $a \circ (b \circ c) \sim (a \circ b) \circ c$
H_3 : $a \succsim b \;\Leftrightarrow\; a \circ c \succsim b \circ c \;\Leftrightarrow\; c \circ a \succsim c \circ b$
H_4 : $a \succ b \;\Rightarrow\; \forall c, d \in A,\; \exists n \in \mathbb{N} : na \circ c \succsim nb \circ d$

Si A représente l'espace des solutions partielles d'un problème combinatoire et $\succsim$ les préférences sur A, on en déduit que l'utilisation d'une fonction coût additivement décomposable (i.e., satisfaisant i et ii) pour diriger la recherche suppose implicitement vérifiées les hypothèses $H_1, \ldots, H_4$. Nous montrons dans la section suivante que certaines de ces hypothèses ne sont pas toujours valides en pratique, appelant ainsi à dépasser le modèle classique.

[1] LIP6 4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France
[2] $\succ$ et $\sim$ sont en fait les parties asymétrique et symétrique de la relation $\succsim$.

Modèles non-classiques

Nous présentons maintenant deux types de problèmes, suscitant un intérêt croissant actuellement, qui ne peuvent se réduire au modèle classique car ils ne vérifient pas certaines de ses hypothèses (sans perte de généralité, nous supposons dans la suite être dans une optique de minimisation des coûts) :

• L'*optimisation combinatoire multicritère* vise à traiter des problèmes où les différents aspects à prendre en compte pour comparer des solutions ne sont pas réductibles à un critère coût unique. Une modélisation naturelle est alors d'utiliser des valuations vectorielles (une dimension par critère considéré), la valuation d'une solution pouvant être définie, par exemple, comme la somme des vecteurs coûts de ses composantes élémentaires. Dans un tel contexte, il s'agit de proposer une solution qui est la plus adéquate en prenant en compte l'ensemble des critères, selon un modèle de préférences adapté. Une solution simple quoique peu discriminante, largement étudiée dans la littérature, est d'utiliser une règle de *dominance* qui consiste à préférer une solution à une autre si et seulement si la première a un coût inférieur à la seconde sur tous les critères et strictement inférieur sur au moins un critère. Clairement, un tel modèle viole l'hypothèse H_1 de complétude des préférences. Ainsi, si l'on considère deux critères et les valuations vectorielles associées, $(2,8)$ et $(3,7)$ sont incomparables au sens de ce modèle.

• L'*optimisation combinatoire robuste* a pour objet de traiter des problèmes où la valeur d'une solution dépend de différents scénarios (sources d'informations divergentes, incertitude sur l'état de la nature...), chacun conduisant à un jeu de valuations plausible sur les composantes élémentaires. L'idée est alors de rechercher une solution *robuste*, c'est-à-dire une solution dont la valeur reste acceptable quel que soit le scénario qui finalement se réalise. Lorsque les coûts dépendent d'une variable exogène (comme par exemple l'état du trafic dans un problème d'itinéraire routier) pouvant prendre un ensemble fini de valeurs connues, il est encore une fois naturel d'utiliser des valuations vectorielles (une dimension par scénario considéré). Un modèle couramment employé consiste alors à comparer les solutions selon leur coût au pire (critère minimax). Un tel modèle viole l'hypothèse H_3. Ainsi, si l'on considère deux scénarios et les valuations vectorielles associées on a $(1,12) \succ (13,4)$ alors que $(1,12)+(1,8)=(2,20) \prec (14,12)=(13,4)+(1,8)$.

Dans ces problèmes décisionnels, l'ensemble des solutions potentielles et les préférences sur ces solutions sont définis en compréhension. Étant donné un modèle décisionnel jugé pertinent, il s'agit maintenant d'étudier la difficulté du problème combinatoire induit et de proposer des solutions algorithmiques adéquates pour la détermination des solutions préférées. Nous donnons dans la suite un bref aperçu de la littérature consacrée aux deux types de problèmes décrits ci-dessus, qui nous semblent représentatifs des travaux pouvant être menés à la frontière entre aide à la décision et optimisation combinatoire.

Optimisation multicritère

Le domaine de l'optimisation multicritère s'est largement développé depuis une quinzaine d'années, comme en témoignent plusieurs articles de synthèse et ouvrages sur le sujet [3, 4].

Complexité. Tout d'abord, précisons que ces problèmes combinatoires, comme c'est plus généralement le cas pour de nombreux problèmes fondés sur des préférences incomplètes, ne sont pas *stricto sensu* des problèmes de recherche puisqu'ils ne portent pas sur la recherche d'une unique solution mais de plusieurs solutions (les solutions *non-dominées*, i.e. pour lesquelles il n'existe pas une autre solution qui les domine). Ainsi, l'étude de la complexité de tels problèmes se fait de manière indirecte en étudiant par exemple [16, 4] :

– le *nombre de solutions renvoyées* au pire. On trouve dans la littérature plusieurs exemples d'instances de problèmes pour lesquelles toutes les solutions réalisables sont non-dominées. Le premier exemple d'un tel type d'instance a été donné par Hansen [8] pour la version multicritère du problème de plus court chemin. À la suite de Warburton [19], Papadimitriou et Yannakakis [12] ont montré qu'on peut toujours obtenir une approximation à ε près de l'ensemble des solutions non-dominées (un ensemble P_ε de solutions tel que pour toute solution non-dominée S il existe une solution de P_ε qui, sur tous les critères, a un coût inférieur à $1+\varepsilon$ fois le coût de S) comportant un nombre de solutions polynomial en la taille du problème et en $\frac{1}{\varepsilon}$ (mais exponentiel en le nombre de critères).

– la complexité du *problème de décision associé*. Le problème de décision associé à un problème combinatoire multicritère consiste à décider, étant donné un vecteur, s'il existe une solution dont le coût sur chacun des critères est plus petit que celui du vecteur considéré. De même que dans les problèmes monocritères, le problème d'énumération des solutions non-dominées est au moins aussi difficile que le problème de décision associé. La NP-complétude du problème de décision associé est donc un bon indicateur de la difficulté d'un problème multicritère. À titre indicatif, les problèmes de décision associés aux problèmes de chemins et d'arbres couvrants multicritères ont été prouvés NP-complets [16, 7]. Cela témoigne du saut de complexité quand on passe d'un problème monocritère à sa contrepartie multicritère.

Algorithmes. Précisons tout d'abord que le cas bicritère peut être traité par des approches spécifiques. En particulier, des méthodes en deux phases (détermination des solutions supportées, c'est-à-dire optimisant une combinaison linéaire des critères, puis détermination des solutions non-supportées via des méthodes de recherche locale, ou encore via des méthodes par séparation et évaluation) et des approches par k-optimisation selon l'un des critères (les solutions non-dominées sont souvent des solutions de bonne qualité pour chacun des critères) ont été développées (voir [4] pour des références sur le sujet). Lorsque le nombre de critères est plus grand, les algorithmes développés pour le modèle classique se généralisent plus ou moins bien selon le principe de résolution sous-jacent. Ainsi, le principe d'optimalité de la programmation dynamique reste valide quand on passe du modèle classique au modèle multicritère étudié ici, autrement dit une politique non-dominée est formée de sous-politiques non-dominées. Les problèmes se résolvant en temps polynomial par programmation dynamique pour le modèle classique se résolvent alors généralement en temps pseudo-polynomial pour le cas multicritère. Des sophistications de ces algorithmes permettent de développer des schémas d'approximation polynomiale [5, 1, 2]. *A contrario*, les algorithmes gloutons se prêtent mal au cas multicritère, et perdent considérablement de leur efficacité car on est alors contraint de développer un arbre de recherche de grande taille [13]. Enfin, remarquons que ces approches algorithmiques se trouvent simplifiées lorsqu'on utilise la notion de solution mixte proposée par Serafini [17]. Une solution mixte est une distribution de probabilité sur un ensemble de solutions. Par exemple, dans un problème comportant trois solutions de coûts respectifs $(20, 10)$, $(16, 16)$ et $(10, 20)$, la solution mixte consistant à affecter des probabilités 0.5 à la première et à la troisième solution a une valeur espérée de $(15, 15)$ et domine la deuxième solution pure. Cette notion est naturelle dans les problèmes auxquels on est confronté de nombreuses fois successivement (e.g., le choix quotidien d'un itinéraire routier entre deux mêmes points). Toute solution non-supportée est alors dominée par une solution mixte, ce qui permet de limiter la recherche aux solutions supportées.

Autres modèles. Face au grand nombre de solutions non-dominées ne présentant pas d'intérêt pour le décideur, il peut être intéressant de focaliser l'effort algorithmique sur la recherche d'une solution non-dominée de compromis. Cela présente de plus l'intérêt de permettre le développement de méthodes plus rapides que les méthodes calculant l'ensemble des solutions non-dominées. Dans cet esprit, Galand [6] montre comment concevoir des algorithmes efficaces pour la recherche d'une solution de compromis dans les problèmes multicritères de chemin, en exploitant la propriété qu'une telle solution a souvent une performance moyenne de qualité.

Optimisation robuste

La recherche de solutions robustes dans les problèmes combinatoires est un champ de recherche qui a été longtemps ignoré, mais qui connaît depuis quelques années un développement rapide, à l'image de la place croissante que prend l'analyse de robustesse en AD. Nous nous focalisons ici sur les problèmes de chemins et d'arbres couvrants.

Complexité. Hamacher et Ruher [7] ont montré que le problème de l'arbre couvrant robuste est NP-difficile. Yu et Yang [21] sont arrivés à la même conclusion pour le problème du chemin robuste.

Algorithmes. Un algorithme exact pour résoudre le problème de l'arbre couvrant robuste est proposé dans [7] (algorithme non polynomial bien sûr). Il consiste à énumérer les arbres couvrants dans l'ordre croissant des coûts selon une somme pondérée des critères jusqu'à obtenir un arbre dont la somme pondérée des critères est plus grande (au sens large) que la plus grande composante des arbres précédemment obtenus. On montre qu'alors un arbre couvrant robuste est inclus dans l'ensemble ainsi engendré. Concernant les algorithmes approchés, Warburton [18] a réalisé une étude sur les heuristiques gloutonnes pour le problème de recherche d'une base robuste d'un matroïde, dont le problème de recherche d'un arbre couvrant minimum robuste au sens absolu est une instance particulière. Il a en particulier proposé un schéma d'approximation polynomiale pour ce problème. Pour le chemin robuste, on obtient un algorithme exact en incorporant des techniques de coupe à un algorithme de recherche des chemins non-dominés (car un chemin robuste est non-dominé) [11]. Des algorithmes approchés avec garantie de performance sont obtenus en utilisant l'heuristique consistant à déterminer le plus court chemin au sens de la moyenne arithmétique des critères [21].

Autre modèles. De nombreux travaux visent à obtenir une solution robuste au sens relatif, i.e. une solution minimisant le regret qui est susceptible d'être engendré (l'écart maximal entre la valeur de la solution choisie et la valeur de la solution optimale dans un scénario donné). Yu et Yang [21] ont montré que les résultats précédents s'étendent à la recherche d'une solution robuste au sens relatif, en explicitant une réduction fondée sur une modification des valuations de l'instance, réduction qui peut s'appliquer à de nombreux problèmes. Des modèles ont également été proposés qui font le parallèle entre la comparaison de solutions évaluées selon plusieurs scénarios et la comparaison de distributions de revenus dans une population [14]. Un autre modèle largement étudié consiste à associer un intervalle de valeurs possibles à chaque composante élémentaire, et à définir l'ensemble des scénarios comme le produit cartésien de ces intervalles [20].

Conclusion

De plus en plus de travaux en optimisation combinatoire portent sur des problèmes qui ne sont pas réductibles au modèle décisionnel classique où l'on cherche à optimiser une fonction scalaire additivement décomposable. Nous nous sommes efforcés ici de montrer les travaux qui peuvent être conduits sur ces problèmes à travers deux modèles représentatifs relevant de l'optimisation multicritère et robuste. Une autre voie de recherche qui n'a pas été présentée ici consiste à identifier les propriétés algébriques permettant d'étendre les algorithmes existants pour le modèle classique (e.g. [15]).

Références

[1] E. Angel, E. Bampis et A. Kononov (2003). On the approximate tradeoff for bicriteria batching and parallel machine scheduling problems. *Theoretical Computer Science* **306**, 319 – 338.

[2] C. Bazgan, H. Hugot et D. Vanderpooten (2005). Un schéma général d'approximation pour certains problèmes combinatoires multi-objectifs. Dans le *Recueil des résumés de ROADEF 2005.*

[3] M. Ehrgott et X. Gandibleux (2000). A survey and annoted bibliography of multiobjective combinatorial optimization. *OR Spektrum* **22**, 425 – 460.

[4] M. Ehrgott (2000). Multicriteria optimization. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **491**, Springer-Verlag.

[5] T. Erlebach, H. Kellerer et U. Pferschy (2002). Approximating multiobjective knapsack problems. *Management Science* **48(12)**, 1603 – 1612.

[6] L. Galand (à paraître). Recherche d'un chemin de meilleur compromis dans un graphe multicritère. Dans les *Actes de ROADEF 2006.*

[7] H.W. Hamacher et G. Ruhe (1994). On spanning tree problems with multiple objectives. *Annals of Operations Research* **52**, 209 – 230.

[8] P. Hansen (1980). Bicriterion path problems. Dans *Multicriteria Decision Making*, G. Fandel et T. Gal.

[9] P. Kouvelis et G. Yu (1997). Robust discrete optimization and its applications. Kluwer.

[10] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes et A. Tversky (1971). Foundations of measurement 1 : Additive and polynomial representations, Academic Press.

[11] I. Murthy et S.S. Her (1992). Solving min-max shortest-path problems on a network. *Naval Research Logistics* **39**, 669 – 683.

[12] C.H. Papadimitriou et M. Yannakakis (2000). On the Approximability of Trade-offs and Optimal Access of Web Sources. Dans *FOCS 2000*, 86 – 92.

[13] P. Perny et O. Spanjaard (2005). A preference-based approach to spanning trees and shortest paths problems. *European Journal of Operational Research* **162**, 584 – 601.

[14] P. Perny, O. Spanjaard et L.-X. Storme (à paraître). A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graphs. *Annals of Operations Research.*

[15] P. Perny, O. Spanjaard et P. Weng (2005). Algebraic Markov Decision Processes. Dans *Proceedings of the 19th IJCAI Conference*, 1372 – 1377.

[16] P. Serafini (1986). Some considerations about computational complexity for multiobjective combinatorial problems. Dans *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* **294**.

[17] P. Serafini (à paraître). Dynamic programming and minimum risk paths. *European Journal of Operational Research.*

[18] A. Warburton (1985). Worst case analysis of greedy and related heuristics for some min-max combinatorial optimization problems. *Mathematical Programming* **33**, 234 – 241.

[19] A. Warburton (1987). Approximation of pareto optima in multiple-objective, shortest-path problems. *Operations Research* **35(1)**, 70 – 79.

[20] H. Yaman, O.E. Karasan, et M.C. Pinar (2001). The robust spanning tree problem with interval data. *Operations Research Letters*, **29**, 31 – 40.

[21] G. Yu et J. Yang (1998). On the robust shortest path problem. *Computers and Operations Research* **25(6)**, 457 – 468.