Reconstructing 3-colored grids from horizontal and vertical projections is NP-hard

C. Dürr[1] Flavio Guiñez[2] Martín Matamala[3]

October 14, 2011

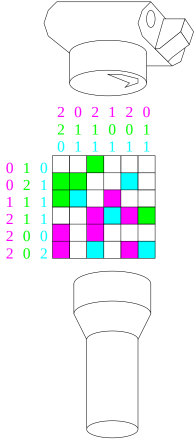
[1] CNRS, LIP6
[2] DMM, Universidad de Chile, Santiago
[3] DMM, CMM, Univ. de Chile, Santiago

Tomographie discrète

- Fixe un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$
- Étant donnée r^c, s^c, trouver $M \in \mathcal{C}^{n \times m}$ tel que

$$r_i^c = |\{j : M_{ij} = c\}|$$
$$s_j^c = |\{i : M_{ij} = c\}|.$$

- parfois on omet les projections d'une couleur, car redondante.



ici $|\mathcal{C}| = 4$

Complexité du problème

Où est la frontière entre polynomial et NP-difficile ?

$\lvert\mathcal{C}\rvert$		
$\vdots$		
7	NP-dur	1997 Gardner, Gritzman, Prangenberg
$\vdots$		
4	NP-dur	1999 Chrobak, D.
3		
2	$\in P$	1957 Ryser

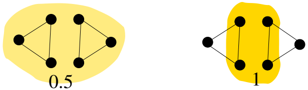
Complexité du problème

Où est la frontière entre polynomial et NP-difficile ?

$\lvert\mathcal{C}\rvert$		
$\vdots$		
7	NP-dur	1997 Gardner, Gritzman, Prangenberg
$\vdots$		
4	NP-dur	1999 Chrobak, D.
3	NP-dur	2009 D., Guiñez, Matamala
2	$\in P$	1957 Ryser

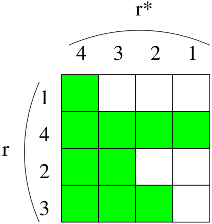
Modélisation par progr. linéaire

- Une variable par cellule et par couleur.
- Contraintes: au total une couleur dans chaque cellule
- Contraintes: projections sur les lignes et colonnes
- Conjecture: s'il y a une solution fractionelle alors il y a une solution entière
- Contre-exemple: avec 165000 variables, basé sur le fait que ce graphe a un *vertex cover* minimal fractionel de taille 3, et entier de taille 4.

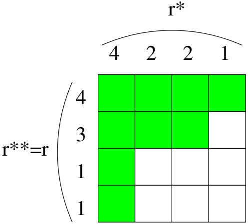


Conjugué (ou dual)

$$r_j^* = |\{i : r_i \geq j\}|$$



si r est décroissant, alors
$(r^*)^* = r$



Dominance

$a, b \in \{0,1\}^n$
Déf: $a \preceq b$ si

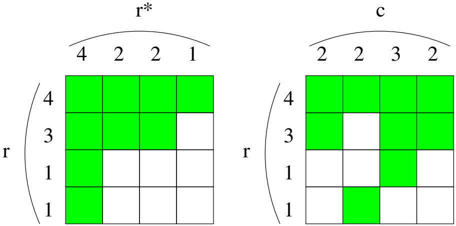
$$\forall \ell : \sum_{i=1}^{\ell} a_i \leq \sum_{i=1}^{\ell} b_i$$

Fait: Une séquence strictement croissante sur $\{a \in \{0,1\}^n : \sum a_i = k\}$ a une longueur au plus $k(n-k)+1$.

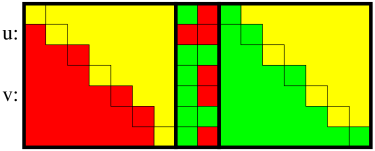
$$\begin{array}{c} 00011 \\ \prec \\ 00101 \\ \prec \\ 00110 \\ \prec \\ 01010 \\ \prec \\ 10010 \\ \prec \\ 10100 \\ \prec \\ 11000 \end{array}$$

Caracterisation

Une instance pour 2 couleurs $\overbrace{(r, c)}^{\text{vert}}$ avec r décroissant,
a une solution si et seulement si $c \preceq r^*$.
De plus si $c = r^*$ la solution est unique.



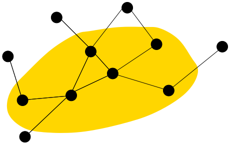
Le gadget C'est une instance $n \times (2n+2)$ pour 3-couleurs, paramétré par u, v et $a, b \in \{0,1\}^n$ avec $\sum a = \sum b = k$



Propriété (qui fait tout marcher)

- S'il y a une solution alors $a \preceq b$.
- Si $a = b$ et $a_u = a_v = 0$, alors il n'y a pas de solution.
- Si $a = b$ et $a_u = 1$ ou $a_v = 1$, alors il y a une solution.

La réduction

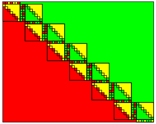


Vertex Cover: Étant donnée $G(V, E), k$, trouver $a \in \{0,1\}^n, |a|_1 = k$ tel que pour tout $(u, v) \in E$, $a_u = 1$ ou $a_v = 1$.

se réduit vers

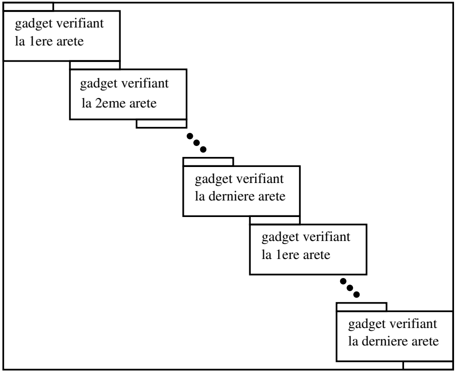
Tomographie à 3 couleurs d'une grille de $N(n+1)+1$ lignes et $N(n+2)+n$ colonnes tel qu'il y a une solution ssi il y a un *vertex cover*,

où $N = k(n-k)m$



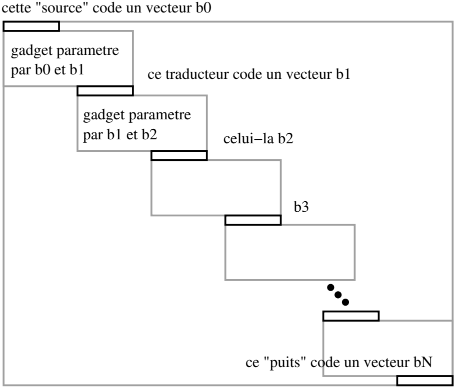
Structure globale

Les projections sont définis tels que s'il y a une solution alors elle a cette forme



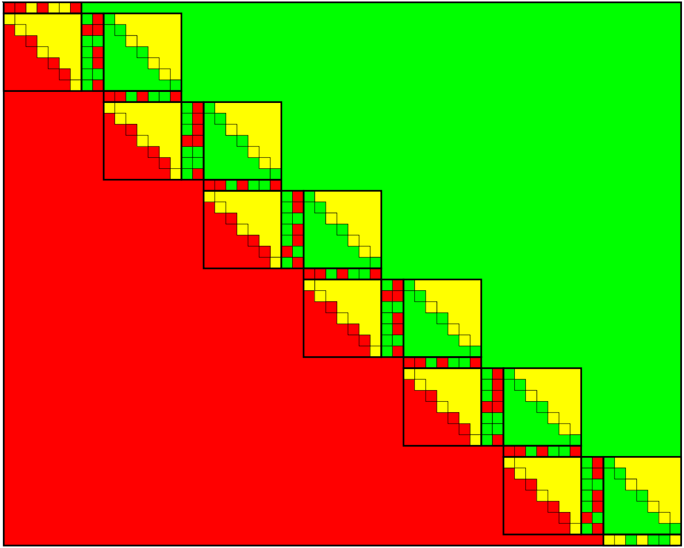
Le rôle des "traducteurs"

Dans toute solution, les bandes $1 \times n$ entre les gadgets codent des vecteurs $b^0, b^1, \ldots, b^N \in \{0,1\}^n$.



- On a $b^0 \preceq b^1 \preceq \ldots \preceq b^N$.
- Par le choix de N, il y a un ℓ tq $b^\ell = b^{\ell+1} = \ldots b^{\ell+m}$.
- Par la propriété des gadgets, l'ensemble codé par b^ℓ est un *vertex cover*.

Pour conclure en couleur Ici $n = 7$, $k = 3$. Le *vertex cover* est $\{3, 5, 6\}$, qui couvre $(2, 5), (3, 4), (5, 6)$. Mais normalement N devrait être 36 et pas 6.



Le principe du gadget (pour ceux suivent encore)

- Si $a = b$, alors les 4 triangles sont fixés.
- les triangles mises à part, les projections demandent pour une ligne $i \notin \{u, v\}$ 1, 2, 1, et pour $i \in \{u, v\}$ 2, 1, 1.
- Si $a_i = 0$, (i, i) est , et il faut placer le(s) dans la bande centrale.
- La colonne $n + 1$ demande un seul , donc $a_u + a_v > 0$.